Sommes de Riemann

Exercice 1: Déterminer la limite des suites de termes généraux suivants :

$$a_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n-1} k\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) \qquad b_n = \sum_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) \qquad c_n = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{k^2}{n^3+k^3}$$

$$d_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{n}{3n^2+k^2} \qquad e_n = \frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}} \qquad f_n = \sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{k}$$

$$g_n = \sum_{k=n}^{2n-1}\frac{n}{k^2} \qquad h_n = \sum_{k=1}^{2n}\frac{k}{k^2+n^2}$$

Exercice 2: Déterminer un équivalent en $+\infty$ de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^\alpha$ pour $\alpha\in\mathbb{R}_+$ à l'aide des sommes de Riemann.

Calculs de limites

Exercice 3: Déterminer l'existence et la valeur des limites suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}\mathrm{d}x.$
2. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 x^n \operatorname{Arccos}(x)\mathrm{d}x.$

Exercice 4: Soit $f\in\mathscr{C}([0;1],\mathbb{R})$. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 t^n f(t)\mathrm{d}t = 0.$

Exercice 5: *Lemme de Riemann-Lebesgue*
Soit $f\in\mathscr{C}^1([a;b],\mathbb{R})$. En utilisant une intégration par parties, montrer que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}\mathrm{d}t = 0$$

Quelles sont les deux autres limites qui découlent de ce lemme ?

Intégrale d'une fonction continue

Exercice 6: Calculer $I = \displaystyle\int_{-3}^{3}\frac{1+x^2}{1+2^x}\mathrm{d}x$. *On pourra utiliser le changement de variable $t=-x$ et calculer $2I$ en sommant l'expression obtenue avec l'expression initiale.*

Exercice 7: Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac12}\mathrm{e}^{\operatorname{Arcsin}(x)}\mathrm{d}x.$

Exercice 8: *Théorème de la moyenne*
Soient a et b deux réels tels que $a<b$, et soit $f:[a;b]\to\mathbb{R}$ une fonction continue.
Montrer qu'il existe $c\in\,]a;b[$ tel que $\displaystyle\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = f(c)$.

On dit que $\displaystyle\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est la valeur moyenne de f. Cette notion généralise celle de moyenne d'un nombre fini de réels en l'appliquant à un nombre infini de valeurs prises par une fonction intégrable. Ce théorème stipule donc que f admet une image qui est égale à sa valeur moyenne.

Exercice 9: Soit $f\in\mathscr{C}([0;1],\mathbb{R})$ telle que

$$\int_0^1 f^2 = \int_0^1 f^3 = \int_0^1 f^4$$

En utilisant la fonction $(f^2-f)^2$, montrer que f est une fonction constante sur [0;1], égale à 0 ou à 1.

Exercice 10: Soit $f:[0,\pi]\to\mathbb{R}$ continue.

1. Montrer que si $\displaystyle\int_0^\pi f(t)\sin(t)\mathrm{d}t = 0$ alors f s'annule au moins une fois.
2. [**] Montrer que si $\displaystyle\int_0^\pi f(t)\sin(t)\mathrm{d}t = \int_0^\pi f(t)\cos(t)\mathrm{d}t = 0$ alors f s'annule au moins deux fois. *On pourra raisonner par l'absurde et utiliser la fonction $t\mapsto f(t)\sin(t-\alpha)$ où α est un zéro de f trouvé dans la question précédente.*

Exercice 11: *Inégalité de Poincaré*
Soit $f\in\mathscr{C}^1([0;1],\mathbb{R})$ telle que $f(0)=0$.
Montrer que

$$\int_0^1 f(t)^2\mathrm{d}t \leqslant \frac12\int_0^1 f'(t)^2\mathrm{d}t$$

On pourra utiliser l'inégalité de Cauchy–Schwarz qui sera démontrée plus tard :
Soient f et g deux fonctions continues sur un segment $[a;b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

$$\left(\int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t\right)^2 \leqslant \left(\int_a^b f(t)^2\mathrm{d}t\right)\left(\int_a^b g(t)^2\mathrm{d}t\right)$$

Fonction définie par une intégrale

Exercice 12: On s'intéresse à la fonction $f : x \mapsto x\displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{e}^t}{1+t}\mathrm{d}t$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Déterminer les variations de f.
3. Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to -1} f(x)$.

Exercice 13: On considère la fonction H définie sur $]1;+\infty[$ par $H(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\ln t}$.

1. Montrer que H est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]1;+\infty[$ et calculer sa dérivée.
   En déduire la monotonie de la fonction H.
2. Posons $u : t \mapsto \dfrac{1}{\ln t} - \dfrac{1}{t-1}$ définie sur $]1;2]$.
   Montrer que u est prolongeable en une fonction continue sur $[1;2]$.
3. Montrer que, pour tout $x \in]1;+\infty[$, $H(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} u(t)\mathrm{d}t + \ln(x+1)$.
4. En déduire que H est prolongeable par continuité en 1.
5. Montrer que ce prolongement, que l'on notera encore H, est de classe $\mathscr{C}^1$.

Formules de Taylor

Exercice 14:

1. Donner la formule de Taylor avec reste intégral de cos en 0 à l'ordre 2.
2. Donner l'inégalité de Taylor-Lagrange de cos en 0 à l'ordre 2.
3. Retrouver le $\mathrm{DL}_2(0)$ de cos en 0.

Exercice 15: En utilisant une formule de Taylor, montrer que :

$$\forall x \in]-1\,;+\infty[\,,\ \ \ln(1+x) \leqslant x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

Pour s'entraîner sur la technique

Exercice 16: [**]

	$\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x^3}\mathrm{d}x = \frac{3}{8}$
	$\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x^3+1}\mathrm{d}x = \frac{1}{18}\left(\sqrt{3}\pi + 3\ln(3) - 6\ln(2)\right)$